Chapitre 13

Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

Commentaires :

On connaissait jusque là (en première année) le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ défini de la manière suivante par exemple si $X=(x_1,x_2), Y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$:

$$<X,Y>=x_1y_1+x_2y_2$$

Son utilité était principalement (surtout dans $\mathbb{R}^2$) d'établir des égalités d'angles géométrique ou des orthogonalités entre deux vecteurs. On rappelle à cet effet qu'on avait

$$<X,Y>=0 \quad \Leftrightarrow \quad X\perp Y$$

On peut en fait généraliser cette notions à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. De plus, on (re)verra que ce produit scalaire peut également nous permettre :

- *de faire des calculs de distance*
- *de diagonaliser certaines matrices dans des bases "intéressantes"*
- *d'inverser de manière immédiate certaines matrices*
- *de faire des projections orthogonales sur des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.*

I Généralités

Dans tout ce chapitre, on pose $n\in\mathbb{N}^*$ et notera $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Commençons par généraliser la notion de produit scalaire :

I-1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition

Pour $u,v\in\mathbb{R}^n$ tels que $M_{\mathcal{B}_0}(u)=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{B}_0}(v)=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$, on appelle *produit scalaire (usuel) de u et v* le nombre

$$<u,v>=x_1y_1+\ldots+x_ny_n$$

Commentaires :

En réalité, il existe beaucoup d'autres "produits scalaires" sur $\mathbb{R}^n$, d'où le nom ici rajouté de "usuel". (Ces autres produits scalaires sont notamment étudiés dans d'autres classes. Attention donc à ne pas s'éparpiller en allant voir inutilement les cours dans d'autres sections !)
Le produit scalcire usuel (celui que nous étudions) est celui utilisé le plus fréquemment dans les calculs géométriques "classiques". Étant donné que ce sera le seul étudié cette année, on pourra dans ce chapitre oublier le terme "usuel".

■ **Exemple 1 :**

Dans $\mathbb{R}^4$, Si $u=(\underbrace{1}_{x_1},\underbrace{0}_{x_2},\underbrace{-1}_{x_3},\underbrace{2}_{x_4})$ et $v=(\underbrace{2}_{y_1},\underbrace{3}_{y_2},\underbrace{-1}_{y_3},\underbrace{1}_{y_4})$, on a

$$<u,v>=1\times2+0\times3+(-1)\times(-1)+2\times1=5$$

Remarque :

Avec les notations de la définition ci-avant, remarquons que la formule du produit scalaire "$x_1y_1+\ldots+x_ny_n$" est également issue du **produit matriciel**

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x_1 & \ldots & x_n\end{pmatrix}}_{\text{une seule ligne, } n \text{ colonnes}}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)=\underbrace{(<u,v>)}_{\text{matrice à une ligne, une colonne}}$$

Le résultat est donc une matrice à une ligne et une colonne contenant $<u,v>$.

■ **Exemple 2 :**

Dans $\mathbb{R}^4$, Si $u=(\underbrace{1}_{x_1},\underbrace{0}_{x_2},\underbrace{-1}_{x_3},\underbrace{2}_{x_4})$ et $v=(\underbrace{2}_{y_1},\underbrace{3}_{y_2},\underbrace{-1}_{y_3},\underbrace{1}_{y_4})$, on a

$$(<u,v>)=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\\1\end{pmatrix}=\left(1\times2+0\times3+(-1)\times(-1)+2\times1\right)=(5)$$

Remarque :

Le résultat du produit matriciel ne contenant qu'un seul élément, on fait l'amalgame entre "matrice" et "nombre" (et donc l'abus de notation) suivant :

$$(<u,v>)=<u,v>$$

D'où

$$\begin{pmatrix}x_1 & \ldots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=<u,v>$$

En notant $U=M_{\mathcal{B}_0}(u)$, $V=M_{\mathcal{B}_0}(v)$, la formule devient donc :

$$\boxed{{}^tUV=<u,v>}$$

où ${}^tU$ est le vecteur "transposé" de U : ${}^tU=\begin{pmatrix}x_1 & \ldots & x_n\end{pmatrix}$. *(voir ex. ci-dessous)*

■ Exemple 3 :

Dans $\mathbb{R}^4$, Si $u = (\underbrace{1}_{x_1}, \underbrace{0}_{x_2}, \underbrace{-1}_{x_3}, \underbrace{2}_{x_4})$ et $v = (\underbrace{2}_{y_1}, \underbrace{3}_{y_2}, \underbrace{-1}_{y_3}, \underbrace{1}_{y_4})$, on a

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; V = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$< u, v >= {}^tUV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$$

? Exercice 1

Pour $u = (0, 3, -1) \in \mathbb{R}^3$, $v = (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$, calculer $< u, v >$ en passant par l'écriture matricielle.

Solution

On a $< u, v >= \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -4$

Commentaires :

Voyons maintenant les quelques propriétés principales du produit scalaire, qui vont nous servir tout au long du chapitre. Elles sont donc à maîtriser.

Proposition 1

Le produit scalaire est :

- bilinéaire ; au sens où, pour tout $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$< u + \alpha v, w >=< u, w > +\alpha < v, w >$$

et

$$< u, v + \alpha w >=< u, v > +\alpha < u, w > .$$

- symétrique ; au sens où

$$< u, v >=< v, u > \qquad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$$

- défini positif ; au sens où

$$< u, u > \geqslant 0 \qquad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

et

$$< u, u >= 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$$

Démonstration :

- Montrons que le produit scalaire est bilinéaire :

Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. On notera les coordonnées de la même manière que dans la définition. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} < u + \alpha v, w > &= {}^t(U + \alpha V) \cdot W \\ &= ({}^tU + \alpha\, {}^tV) \cdot W \\ &= {}^tU \cdot W + \alpha\, {}^tV \cdot W =< u, w > +\alpha < v, w > \end{aligned}$$

De même pour la deuxième égalité.

- Montrons que le produit scalaire est symétrique :

Clairement, si on échange u et v dans la formule de la définition on trouve exactement le même résultat. C'est donc bien symétrique.

- Montrons que le produit scalaire est défini positif :

$$< u, u >= x_1^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant 0$$

De plus,

$$< u, u >= 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0$$

Or, comme le terme de gauche est une somme de nombres positifs, la seule manière d'obtenir 0 est que chaque terme soit nul. Autrement dit,

$$x_1 = \ldots = x_n = 0$$

et donc

$$u = 0$$

□

Remarque :

Le terme bilinéaire vient du fait que le produit scalaire est linéaire par-rapport à chaque variable. Le comportement est celui d'un développement de parenthèses dans un produit.

? Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^n$, sachant que $||u||^2 = 1$, $< u, v >= 1$, $< v, w >= -1$ et $< u, w >= -1$, vérifier que $< u + w, 2v >= 0$ ainsi que $< u + w, u + v >= 0$.

Solution

$$< u + w, 2v >=< u, 2v > + < w, 2v >= 2 < u, v > +2 < w, v >= 2 - 2 = 0$$
$$< u + w, u + v >=< u, u > + < u, v > + < w, u > + < w, v >= 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

Définition
On appelle *norme euclidienne* d'un vecteur u le nombre
$$||u|| = \sqrt{< u,u >}$$

Remarque :
Dans la base canonique, la formule correspond à
$$||u|| = \sqrt{< u,u >} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$
où $u = (x_1, \ldots, x_n)$

Commentaires :
Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, on sait déjà que ceci correspond en fait à la longueur du vecteur u. C'est le même principe dans $\mathbb{R}^n$. Ainsi, les propriétés déjà vraies dans $\mathbb{R}^2$ vont se généraliser dans $\mathbb{R}^n$.

Propriété 2

Si $u \in \mathbb{R}^n$, on a
$$||u|| = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad u = 0$$

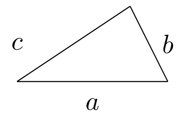
Théorème 3 *: Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$. On a
$$| < u,v > | \leqslant ||u|| ||v||$$
avec
$$| < u,v > | = ||u|| ||v|| \qquad \Leftrightarrow \qquad (u,v) \text{ proportionnels}$$

Démonstration :
Si $v = 0$, alors l'inégalité est triviale (et c'est même une égalité) :
$$< u,v >= 0 = ||u|| \times 0 = ||u|| ||v||$$
Si $v \neq 0$, on pose $t \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{aligned} 0 \leqslant ||u+tv||^2 &= < u+tv, u+tv > \\ &= < u,u > +t < u,v > +t < v,u > +t^2 < v,v > \\ &= ||u||^2 + 2t < u,v > + ||v||^2 t^2 \end{aligned}$$
L'expression obtenue est donc un polynôme en t, toujours positif, de coefficient dominant positif. Ainsi, ce polynôme n'a d'autre choix que d'avoir un discrimant négatif.

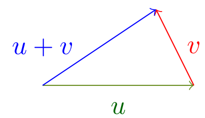
Or,
$$\begin{aligned} 0 \geqslant \Delta &= (2 < u,v >)^2 - 4||u||^2||v||^2 \\ &= 4\left(< u,v >^2 - ||u||^2||v||^2\right) \end{aligned}$$
On en déduit $< u,v >^2 \leqslant ||u||^2||v||^2$ et donc
$$| < u,v > | \leqslant ||u|| ||v||$$
En remontant le raisonnement, on a de plus,
$$\begin{aligned} | < u,v > | = ||u|| ||v|| &\Leftrightarrow \Delta = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } t_0 \text{ tel que } ||u||^2 + 2t_0 < u,v > + ||v||^2 t_0^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } t_0 \text{ tel que } ||u + t_0 v||^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } t_0 \text{ tel que } u = -t_0 v \end{aligned}$$
□

Commentaires :
L'inégalité suivante prise dans $\mathbb{R}^2$ traduit (et justfie) en particulier le fait que dans un triangle, la somme des longeurs de deux des côtés est nécessairement supérieure à la longueur du troisième :



$c \leqslant a + b$ *ou encore* $a \leqslant b + c$ *etc...*

sachant qu'en terme de vecteur, on a



avec alors
$$||u|| = a, \quad ||v|| = b, \quad ||u+v|| = c$$

De manière générale :

Théorème 4 *: Inégalité triangulaire*

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$. On a
$$||u+v|| \leqslant ||u|| + ||v||$$
avec égalité si et seulement si u et v sont propotionnels dans le même sens.

Démonstration :
Étant donné que les deux côtés de l'inégalités sont positifs on peut passer au carré :
$$\begin{aligned} ||u+v||^2 &= < u+v, u+v > \\ &= < u,u > + < u,v > + < v,u > + < v,v > \\ &= ||u||^2 + ||v||^2 + 2 < u,v > \\ &= (||u|| + ||v||)^2 - 2||u||.||v|| + 2 < u,v > \end{aligned}$$

Or, par inégalité de Cauchy-Schwarz, on sait que

$$| < u, v > | \leqslant ||u||.||v||$$

d'où

$$||u+v||^2 \leqslant (||u|| + ||v||)^2$$

$||u+v||$ et $||u|| + ||v||$ étant positifs, on en déduit l'inégalité triangulaire.

On a de plus égalité si et seulement si $< u, v >= ||u||.||v||$.
Ainsi, d'après CS, on a u et v proportionnels. Si u et v sont dans le sens opposé (et non nuls), le calcul montre que

$$< u, v >< 0 \quad \text{et donc} \quad < u, v > \neq ||u||.||v||$$

□

Commentaires :

> *De la démonstration du théorème précédent, on tire également que la norme de la somme de deux vecteurs peut se calculer de la manière suivante :*

Propriété 5

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$. On a

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2 < u, v >$$

Cette propriété peut également (dans de rares cas, si on connait la longueur des trois côtés,) servir à calculer un produit scalaire sans disposer des coordonnées :

$$< u, v >= \frac{1}{2}\left(||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2\right)$$

? Exercice 3

Soit dans $\mathbb{R}^2$ un triangle ABC rectangle en A tel que $||AC|| = 2,\ ||AB|| = 1$. Calculer $< \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} >$.
(On remarquera que l'on sait déterminer la longueur de $\overrightarrow{CB}$. On prendra soin de choisir correctement ses vecteurs "u, v" afin de pouvoir appliquer la formule précédente !)
Vous devez trouver le résultat $< \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} >= 4$.

Solution

On a $< \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} >= - < \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} >= -\frac{1}{2}\left(||\underbrace{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}}_{\overrightarrow{AB}}||^2 - ||\overrightarrow{AC}||^2 - ||\overrightarrow{CB}||^2\right)$ avec,
d'après la formule de Pythagore : $||\overrightarrow{CB}||^2 = ||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{AC}||^2$
D'où $< \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} >= -\frac{1}{2}\left(-2||\overrightarrow{AC}||^2\right) = 4$

I-2 Changement de base

Commentaires :

> *Et si les vecteurs u et v ne sont pas donnés dans la base canonique mais dans une base autre $\mathcal{B}$, comment calculer $< u, v >$? A-t-on encore le droit d'utiliser la même formule ?*
> *i.e. Si $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{B}_0}(v) = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, comment calculer $< u, v >$?*

? Exercice 4

On se donne une base $\mathcal{B} = (\underbrace{(1,1)}_{v_1}, \underbrace{(-1,2)}_{v_2})$ une base de $\mathbb{R}^2$ ainsi que u, v exprimés dans la base $\mathcal{B}$ tels que $u = (-1,1)_{\mathcal{B}}$ et $v = (a,b)_{\mathcal{B}}$. Se ramener à la base canonique pour calculer $< u, v >$
(Vérifiez que vous trouvez $< u, v >= 4b - a$ et non $-a + b$).

Solution

Option 1 : Une possibilité est d'exprimer u, v dans la base canonique grâce à la décomposition dans la base :
On a $u = -v_1 + v_2 = (-2, 1)$ ainsi que $v = av_1 + bv_2 = (a - b, a + 2b)$. Maintenant que les vecteurs sont exprimés dans la base canonique, on peut calculer $< u, v >= -2 \times (a - b) + 1 \times (a + 2b) = -a + 4b$.

Option 2 : une autre possibilité est d'utiliser les matrices de passage :
La matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est $P = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$
Ainsi,

$$M_{\mathcal{B}_0}(u) = P\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix} \quad et \quad M_{\mathcal{B}_0}(v) = P\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-b\\ a+2b\end{pmatrix}$$

D'où

$$< u, v >= -2 \times (a - b) + 1 \times (a + 2b) = 4b - a$$

Commentaires :

> *On constate que la formule $\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n$ n'est donc pas forcément valide pour calculer le produit scalaire quand on change de base pour exprimer les coordonnées !*
> *Oups ...Cherchons alors,une formule valable dans toutes les bases !*

Commençons par observer tout ceci de manière matricielle :
Si les vecteurs sont donnés dans une base nommée $\mathcal{B}$, on peut se ramener à la base canonique grâce à la formule classique de changement de base :

$$M_{\mathcal{B}_0}(u) = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})M_{\mathcal{B}}(u), \qquad M_{\mathcal{B}_0}(v) = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})M_{\mathcal{B}}(v)$$

Avec les vecteurs obtenus dans la base canonique, on fait le calcul. De plus, $M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})$ est en général une matrice facilement identifiable : on n'a pas à inverser.

■ Exemple 4 :

Dans l'exercice ci-dessus : on aurait $M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

et on aurait alors

$$M_{\mathcal{B}_0}(u) = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}_0}(v) = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ a+2b \end{pmatrix}$$

et donc

$$< u, v >= \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-b \\ a+2b \end{pmatrix} = 4b - a$$

Notons que pour ceci, on peut également utiliser la bilinéarité du produit scalaire :

Par exemple, dans l'exercice ci-dessus : $u = -v_1 + v_2,\ v = av_1 + bv_2$
alors

$$\begin{aligned} < u, v > &= < -v_1 + v_2, av_1 + bv_2 > \\ &= -< v_1, av_1 + bv_2 > + < v_2, av_1 + bv_2 > \text{(linéarité à gauche)} \\ &= -(a < v_1, v_1 > + b < v_1, v_2 >) + (a < v_2, v_1 > + b < v_2, v_2 >) \text{ (lin. à droite)} \\ &= -a \underbrace{< v_1, v_1 >}_{=2} + (-b + a) \underbrace{< v_1, v_2 >}_{=1} + b \underbrace{< v_2, v_2 >}_{=5} \\ &= -2a + (a - b) + 5b = 4b - a \end{aligned}$$

? Exercice 5

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ donnés dans la base canonique. Calculer $< u, v >$ où $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ à l'aide de la bilinéarité du produit scalaire.
(Vous devez trouver $< u, v >= 0$.)

Solution

En écrivant

$$u = V_1 - V_2 + 2V_3 \qquad \text{et} \qquad v = -V_1 + V_3$$

on trouve, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned} < u, v > &= < V_1 - V_2 + 2V_3, v > \\ &= < V_1, v > - < V_2, v > + 2 < V_3, v > \quad \text{(linéarité à gauche)} \\ &= (- < V_1, V_1 > + < V_1, V_3 >) \quad \text{(linéarité à droite avec } v = -V_1 + V_3 \\ &\quad - (- < V_2, V_1 > + < V_2, V_3 >) \\ &\quad + 2(- < V_3, V_1 > + < V_3, V_3 >) \end{aligned}$$

En calculant les produits scalaires deux à deux des vecteurs de la base, on peut conclure.
On a :

$$\begin{cases} < V_1, V_1 >= 6 \\ < V_1, V_2 >= -3 \\ < V_1, V_3 >= 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} < V_2, V_3 >= -2 \\ < V_3, V_3 >= 6 \end{cases}$$

D'où

$$< u, v >= 0$$

Commentaires :

Ces deux méthodes permettront toutes deux d'arriver à même une formule générale utilisant une matrice que nous allons d'abord étudier à part.

Définition

Étant donné une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On appelle *matrice de Gram de la base $\mathcal{B}$*, la matrice des "produits scalaires de $\mathcal{B}$" ci-dessous

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} < v_1, v_1 > & < v_1, v_2 > & \dots & < v_1, v_n > \\ < v_2, v_1 > & < v_2, v_2 > & & < v_2, v_n > \\ \vdots & & & \vdots \\ < v_n, v_1 > & \dots & \dots & < v_n, v_n > \end{pmatrix} = \left(< v_i, v_j > \right)_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$$

■ Exemple 5 :

Pour la base de l'exemple précédent $\mathcal{B} = (\underbrace{(1,1)}_{v_1}, \underbrace{(-1,2)}_{v_2})$ on vu dans les calculs que

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

? Exercice 6

Calculer la matrice de Gram dans l'exercice précédent pour $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3) = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$

Solution

Des calculs de l'exercice précédent, on tire :

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 \\ -3 & & -2 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

où il resterait à calculer $< V_2, V_2 >$ (qui vaut $< V_2, V_2 >= 2$). On peut donc compléter :

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Commentaires :

Reprenons l'exemple précédent et voyons grâce à la bilinéarité à quoi peut bien servir cette matrice, mis à part à faire un beau tableau résumé des données !

Revenons à notre changement de base en méthode matricielle :

Pour des vecteurs donnés dans une base $\mathcal{B}$, on avait revu les formules :

$$M_{\mathcal{B}_0}(u) = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})M_{\mathcal{B}}(u), \qquad M_{\mathcal{B}_0}(v) = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})M_{\mathcal{B}}(v)$$

Pour simplifier, on note :

$$U_0 = M_{\mathcal{B}_0}(u),\ U = M_{\mathcal{B}}(u)$$

les coordonnées respectives de u dans les base canoniques et la base $\mathcal{B}$, (de même pour v,) puis

$$P = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) \quad \text{la matrice de passage}$$

Les formules deviennent

$$U_0 = PU, \quad V_0 = PV$$

Rappelons maintenant la formule matricielle du produit scalaire dans la base canonique :

$$< u, v >= {}^tU_0V_0$$

Combinons maintenant les deux en remplaçant $U_0 = PU$ et $V_0 = PV$ dans la ligne ci-dessus :

$$< u, v >= {}^t(PU)PV = {}^tU\,{}^tPPV$$

En posant $G = {}^tPP$, on obtient donc une formule sous forme de produit matriciel

$$< u, v >= {}^t(PU)PV = {}^tUGV$$

que nous allons tester sur un exemple !

■ Exemple 6 :

Dans l'exemple déjà évoqué dans cette section, avec $\mathcal{B} = (\underbrace{(1,1)}_{v_1}, \underbrace{(-1,2)}_{v_2})$, ainsi que $u = (-1,1)_{\mathcal{B}}$ et $v = (a,b)_{\mathcal{B}}$. Pour $< u, v >$, on peut donc procéder de la manière suivante : On pose la matrice de changement de base

$$P = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

de transposée :

$${}^tP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On calcule

$$G = {}^tP.P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on a donc

$$< u, v >= \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}.G.\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 4b - a$$

Commentaires :

Mais quel est donc le rapport avec la matrice de Gram $G_{\mathcal{B}}$ évoquée précédemment ? ?

Et bien, (les notations sont bien faites ! !) c'est la même :

$$\boxed{G_{\mathcal{B}} = {}^tPP}$$

Voyons ça :

En effet, si on note V_i la $i^{\text{ème}}$ colonne de P, on sait par définition que

$$V_i = M_{\mathcal{B}_0}(v_i) \quad \textit{coordonnées dans la base canonique de } v_i$$

On peut donc d'une part calculer matriciellement $< v_i, v_j >$ avec

$$< v_i, v_j >= {}^tV_iV_j$$

mais si on calcule le produit ${}^tPP$, par formule de calcul sur les produits de matrice, ${}^tV_iV_j$ est exactement le coefficient dans la ligne i, colonne j de la matrice ${}^tPP$. On tombe donc bien sur ${}^tPP = G_{\mathcal{B}}$

Commentaires :

Tout ceci donne donc lieu en général à la formule suivante :

Proposition 6

Si $u, v \in \mathbb{R}^n$, en notant G la matrice de Gram d'une base $\mathcal{B}$, alors

$$< u, v >= {}^tM_{\mathcal{B}}(u)\ G_{\mathcal{B}}\ M_{\mathcal{B}}(v)$$

? Exercice 7

Reprenons la base de l'exercice précédent : $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

Calculer $<u,v>$ où $M_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}}(v)=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ à l'aide de la méthode matricielle en retrouvant la matrice de Gram à l'aide du calcul $G_{\mathcal{B}}={}^tPP$.

Solution

On a
$$<u,v>={}^tM_{\mathcal{B}}(u)\ G_{\mathcal{B}}\ M_{\mathcal{B}}(v)$$
avec
$$P=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&-1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}\quad \text{d'où}\quad {}^tP=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&1\\2&1&-1\end{pmatrix}$$
et
$$G_{\mathcal{B}}={}^tPP=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&1\\2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\2&-1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-3&5\\-3&2&-2\\5&-2&6\end{pmatrix}$$
et donc
$$<u,v>=\begin{pmatrix}1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&-3&5\\-3&2&-2\\5&-2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=0$$

Remarquons que tout ceci se retrouve par bilinéarité sur un exemple :

Exemple 7 :

On avait $\mathcal{B}=(\underbrace{(1,1)}_{v_1},\underbrace{(-1,2)}_{v_2})$ ainsi que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)=(-1,1)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)=(a,b)$, c'est-à-dire :
$$u=-v_1+v_2,\ \ v=av_1+bv_2$$
avec
$$\begin{aligned}<u,v>&=<-v_1+v_2,v>\\&=-<v_1,v>+<v_2,v>\ \text{(linéarité à gauche)}\end{aligned}$$
Matriciellement on observe alors que c'est le même calcul que
$$<u,v>=\begin{pmatrix}-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}<v_1,v>\\<v_2,v>\end{pmatrix}$$
Maintenant, par linéarité à droite sur chaque terme :
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}<v_1,v>\\<v_2,v>\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}<v_1,av_1+bv_2>\\<v_2,av_1+bv_2>\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a<v_1,v_1>+b<v_1,v_2>\\a<v_2,v_1>+b<v_1,v_2>\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}<v_1,v_1>&<v_1,v_2>\\<v_2,v_1>&<v_2,v_2>\end{pmatrix}}_{=G}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\end{aligned}$$
Mis bout à bout, cela donne : $<u,v>=\begin{pmatrix}-1&1\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

II Orthogonalité

II-1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition

Deux vecteurs $u,v\in\mathbb{R}^n$ sont dits *orthogonaux* si $<u,v>=0$. On note $u\perp v$

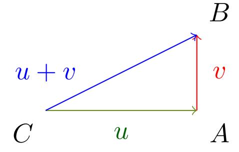
Théorème 7 *de Pythagore :*

Soient $u,v\in\mathbb{R}^n$. On a
$$u\perp v\quad\Longleftrightarrow\quad ||u+v||^2=||u||^2+||v||^2$$

Démonstration :

Da la somme de deux vecteurs, on tire l'égalité :
$$||u+v||^2=||u||^2+||v||^2+2<u,v>$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}u\perp v\ &\Leftrightarrow\ <u,v>=0\\&\Leftrightarrow\ ||u+v||^2=||u||^2+||v||^2\end{aligned}$$
□

Remarque :

Ce théorème peut se traduire également de la manière bien connue suivante :
Soient $A,B,C\in\mathbb{R}^n$. On a
$$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\quad\Longleftrightarrow\quad ||\overrightarrow{BC}||^2=||\overrightarrow{AB}||^2+||\overrightarrow{AC}||^2$$
C'est-à-dire dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$:
$$||u+v||^2=||u||^2+||v||^2\quad :$$


Définition

Une famille $(v_1,\dots,v_s)\in\mathbb{R}^n$ est appelée *base orthogonale* de l'e.v. $F\subset\mathbb{R}^n$ si :

- $(v_1,\dots,v_s)$ est une base de F
- les vecteurs $v_1,\dots,v_s$ sont deux à deux orthogonaux

Exemple 8 :

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthogonale.

Exercice 8

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. On admet que c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Montrer que c'est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Solution

On note u, v, w respectivement, dans l'ordre cité ci-dessus les vecteurs de $\mathcal{B}$. On observe que $< u, v >=< v, w >=< u, w >= 0$. la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est ainsi orthogonale.

Définition

Une famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_s) \in \mathbb{R}^n$ est appelée *base orthonormale* (ou *base orthonormée*) de l'e.v. $F \subset \mathbb{R}^n$ si :

- $(u_1, \ldots, u_s)$ est une base de F
- les vecteurs $u_1, \ldots, u_s$ sont deux à deux orthogonaux   Dans ce cas, on dit que
- les vecteurs $u_1, \ldots, u_s$ sont tous de norme 1.

la matrice $P = \mathcal{M}_{B_0}(\mathcal{F})$ est une *matrice orthogonale*.

Exercice 9

Dans l'exercice précédent, montrer que $\mathcal{B}$ n'est pas une base orthonormée.

Solution

Avec les notations de l'exercice précédent, il suffit par exemple de constater que $||u||^2 = 3 \neq 1^2$. Ainsi, la base n'est pas orthonormée.

Remarque :

Pour tranformer une base orthogonale en une base orthonormée, il suffit de diviser chaque vecteur par sa norme.

Exemple 9 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on a vu que la famille $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_3} \right\}$ était une base orthogonale, ainsi la famille $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base orthonormée car

$$||v_1|| = \sqrt{3}, \ ||v_2|| = \sqrt{2}, \ ||v_3|| = \sqrt{6}$$

et donc

$$\left|\left| \frac{1}{\sqrt{3}} v_1 \right|\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} ||v_1|| = 1$$

de même

$$\left|\left| \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 \right|\right| = 1, \qquad \left|\left| \frac{1}{\sqrt{6}} v_3 \right|\right| = 1$$

Exercice 10

Soit la base orthogonale (admis pour l'instant) de $\mathbb{R}^3$ notée $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$. Déterminer la base orthonormée issue de $\mathcal{B}$.

Solution

On a $\mathcal{B}' = \left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$